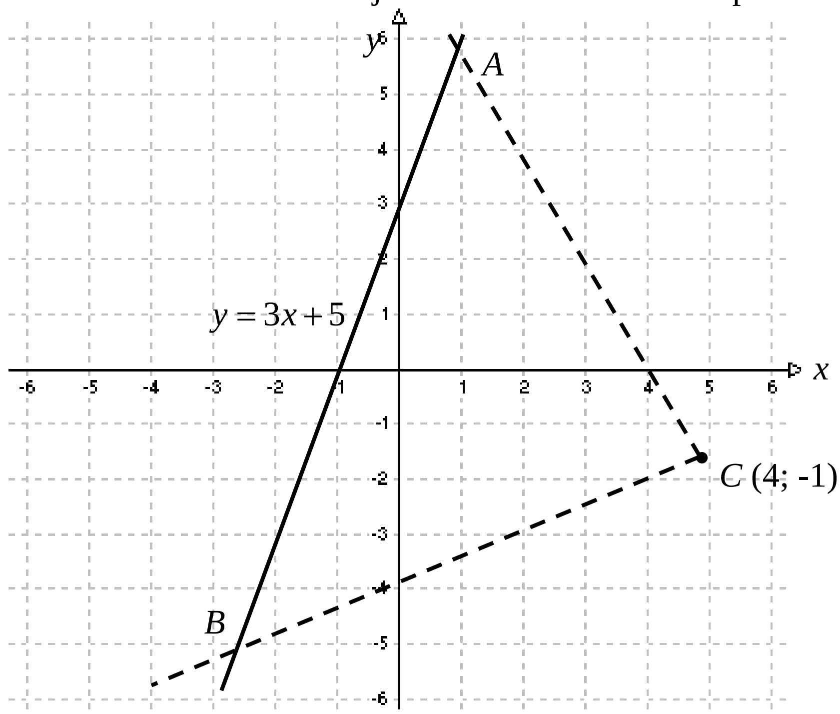
Eesti koolinoorte LIX täppisteaduste olümpiaad
MATEMAATIKA KOOLIVOOR
Tallinnas, 22. novembril 2011. a.
XI klass
Lahendused ja hindamine

LAHENDUSED

1. *Vastus:* $\boldsymbol{y = -2x + 7}$ **ja** $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x - 3}$**.**

Lahendus. Teeme abistava joonise. Otse loomulikult pole see täpne.



Tähistame kolmnurga ülejäänud kaks tippu tähtedega *A* ja *B*. Olgu kaateti tõus *k* (pole oluline kumma kaateti). Hüpotenuusi tõus on 3. Järgnevalt kasutame asjaolu, et hüpotenuusi ja kaateti vaheline nurk on mõlemal juhul $45°$. Vastavalt kahe sirge vahelise nurga suuruse arvutamise valemile

$$\tan 45° = \left|\frac{k-3}{1+k\cdot 3}\right|,$$

Kahe sirge vaheline nurk $\tan\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$, kus k_1 ja k_2 on sirgete tõusud

millest

$$\left|\frac{k-3}{3k+1}\right| = 1.$$

Vastavalt absoluutväärtuse definitsioonile saame kaks juhtu.

1) Kui $\frac{k-3}{3k+1} = 1$, siis $k - 3 = 3k + 1 \Rightarrow k = -2$.

Kaateti *AC* võrrandi moodustamiseks kasutame punkti *C*(4; -1) ja tõusu $k = -2$: $y + 1 = -2\cdot(x-4) \Rightarrow y = -2x + 7$

Punkti ja tõusuga määratud sirge võrrand $y - y_1 = k(x - x_1)$

2) Kui $\frac{k-3}{3k+1} = -1$, siis $k - 3 = -3k - 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$.

Kaateti *BC* võrrandi moodustamiseks kasutame punkti C(4; -1) ja tõusu $k = \frac{1}{2}$: $y + 1 = \frac{1}{2}\cdot(x-4) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 3$

2.

Tõestus. Paneme tähele, et kaksliikme $a-b$ astendamisel jaguvad kõik liikmed peale viimase *a*-ga.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, millest $(a^2 - 2ab) \vdots a$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, millest $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2) \vdots a$

…

Asjaolu on ilmne, sest korrutises ei sisalda vaid viimane liige tegurit *a*. Teisiti, astme $(a-b)^n$ arendis ei jagu vaid viimane liige b^n *a*-ga. Kui astendaja *n* on paarituarvuline, siis on viimase liikme kordaja -1, ning liites liikme b^n, saame juba täpse jaguvuse.

Niisiis paarituarvulise astendaja *n* korral

$$\left[(a-b)^n + b^n\right] \vdots a,$$

millest meile kasulikult

$$\left[(2012-1)^{2011} + 1^{2011}\right] \vdots 2012$$

$$\left[(2012-2)^{2011} + 2^{2011}\right] \vdots 2012$$

Avaldiste summa jagub samuti arvuga 2012, seega

$$\left[\left(2011^{2011} + 1^{2011}\right) + \left(2010^{2011} + 2^{2011}\right)\right] \vdots 2012,$$

millest liidetavate kasvavas järjestuses saame

$$\left(1^{2011} + 2^{2011} + 2010^{2011} + 2011^{2011}\right) \vdots 2012.$$

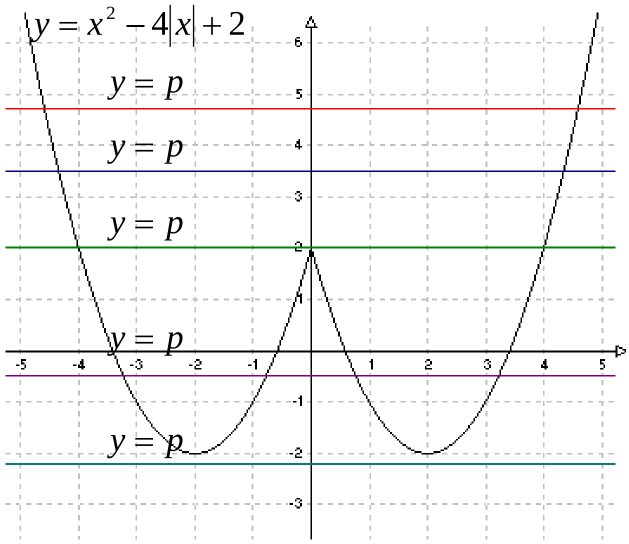
M. o. t. t.

3. *Vastus:* $\mathbf{p = 2}$.

Lahendus. Võrrand $x^2 - 4|x| + 2 = p$ on samaväärne võrrandite süsteemiga

$\begin{cases} y = x^2 - 4|x| + 2 \\ y = p \end{cases}$. Lahendame süsteemi graafiliselt.

Funktsiooni $y = x^2 - 4|x| + 2$ graafik on kombinatsioon kahest paraboolist: piirkonnas $-\infty < x < 0$ parabool $y = x^2 + 4x + 2$ ning piirkonnas $0 \le x < +\infty$ parabool $y = x^2 - 4x + 2$. Funktsiooni $y = p$ graafikuks on x-teljega paralleelne sirge.



Jooniselt näeme, et võrrandil on

a) 2 lahendit, kui $p > 2$;
b) 3 lahendit, kui $p = 2$;
c) 4 lahendit, kui $-2 < p < 2$
d) 2 lahendit, kui $p = -2$;
e) 0 lahendit, kui $p < -2$.

Niisiis lõikuvad graafikud täpselt kolmes punktis siis, kui $p = 2$.

Kontroll. Kui $p = 2$, siis saab võrrand kuju

$$x^2 - 4|x| + 2 = 2$$

$$x^2 - 4|x| = 0$$

1) Kui $x < 0$, siis saame võrrandi

$$x^2 + 4x = 0,$$

mille lahendid on $x_1 = -4$ ja $x_2 = 0$.

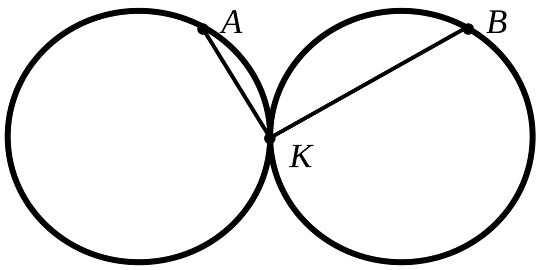
2) Kui $x \ge 0$, siis saame võrrandi

$$x^2 - 4x = 0,$$

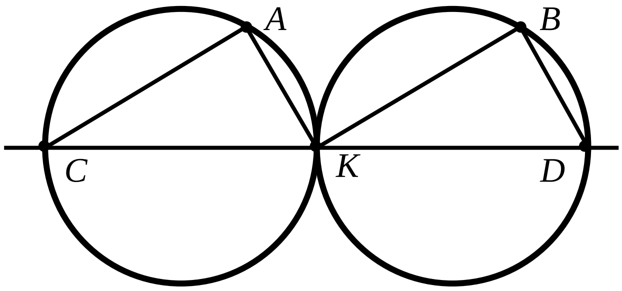
mille lahendid on $x_2 = 0$ ja $x_3 = 4$.

Võrrandil $x^2 - 4|x| + 2 = p$ on täpselt kolm lahendit siis, kui $p = 2$.

4. *Vastus:* $\boldsymbol{|BK| = 8}$ **cm.**



Lahendus. Teeme abistava joonise.
Konstrueerime kaks kolmnurka *CKA* ja *KDB*.
Tõmbame läbi punkti *K* sirge, mis on risti punkti *K* läbiva ühise puutujaga. Olgu *C* selle sirge teine lõikepunkt ringjoonega, millel asub punkt *A*, ning *D* selle sirge lõikepunkt teise ringjoonega. Sellisel juhul on *KC* ja *KD* ringjoone diameetrid, kusjuures $|KD| = |KC| = 10$ cm.



Joonestame lõigud *AC* ja *BD*. Nüüd on joonisel kaks kolmnurka *CKA* ja *KDB*.
Näitame, et tegemist on täisnurksete kolmnurkadega.
Thalese teoreemi põhjal on diameetrile toetuv nurk täisnurk, seega on kolmnurgad *CAK* ja *KDB* täisnurksed.
Näitame, et antud kolmnurgad on kongruentsed.
Et $\angle CAK = \angle AKB = 90°$, siis on sirglõigud *CA* ja *KB* paralleelsed, järelikult $\angle KCA = \angle DKB$ (kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmandaga tekib paar võrdseid kaasnurki). Niisiis on täisnurksed kolmnurgad CKA ja *KDB* sarnased. Et nende hüpotenuusid on võrdsed, siis on ka kolmnurgad võrdsed.

Pythagorase teoreemist

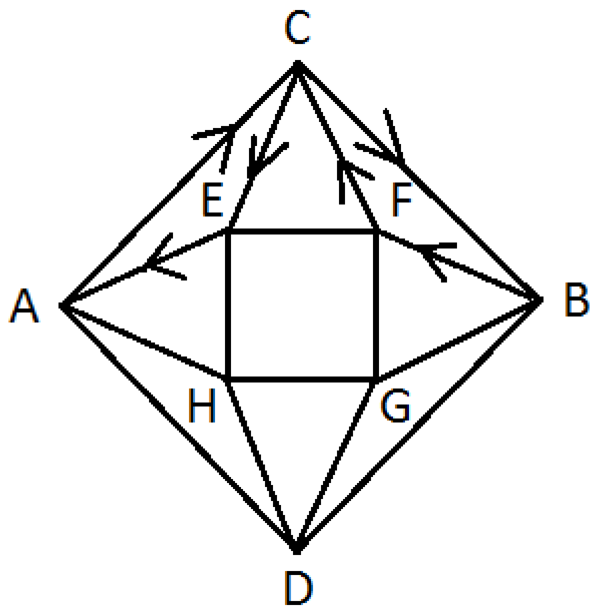
$$|BK| = |CA| = \sqrt{|KC|^2 - |AK|^2} = 8 \text{ cm.}$$

5. *Vastus:* **Ei**.
Lahendus. Oletame, et see on võimalik.
Tähistame linnad tähtedega *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* ja *H*.

Linnast *A* linna *B* pääseb kas linna *C* või linna *D* kaudu.

Vaatleme juhtu, kus linna *B* pääseb *A*-st *C* kaudu, teine juht on analoogiline. Kuna otsetee *C*-st *A*-sse on nüüd kinni, siis linnast *C* pääseb linna *A* ainult linna *E* kaudu. Analoogiliselt pääseb linnast *B* linna *C* ainult *F* kaudu.

Nüüd vaatame, kuidas saada linnast *A* linna *F*. See oleks võimalik kas linna *E* või linna *C* kaudu, kuid kumbki teekond ei ole enam läbitav. Saime vastuolu.



HINDAMINE

1. Abistava joonise eest 1p
Hüpotenuusi tõusu leidmise ja kaatetite tõusu valiku eest 2p
Võrrandi moodustamise eest 1p
Lahenduse tehnilise lõpuleviimise eest 3p
Märkus. Joonise puudumine õige lahenduse korral annab 7p. **7p**
Õpilane võib lahenduses vältida absoluutväärtust ning leida teise kaateti võrrandi hoopis ristseisu kasutades. Et ülesannet saab lahendada väga erinevalt (vektorite ristseis, kõrgus langeb hüpotenuusi keskpunkti, tippude *A* ja *B* koordinaatide kindlakstegemine), siis jääb punktide panemine parandaja otsustada. Abiks tippude koordinaadid *A*(0,4; 6,2) ja *B*(-3,2; -4,6). Ükskõik kui keeruka või ebaratsionaalse, kuid õige lahenduse eest anda 7p.

2. Kaksliikme astme jaguvuse uurimise eest 2p
Sobiva kuju ($2011 = 2012 - 1$, $2010 = 2012 - 2$) kirjeldamise ees 1p
Tõestuse tehnilise lõpuleviimise eest 4p
7p

3. Funktsiooni $y = x^2 - 4|x| + 2$ graafiku joonestamise eest 3p
Sirge $y = p$ joonestamise või kirjeldamise eest 1p
Lahendi (näiteks jooniselt) leidmise eest 2p
Kontrolli eest 1p
Märkus. Et jooniselt vaatamine pole täpne, siis tuleb parameetri väärtust $p = 2$ kontrollida. **7p**

4. Korrektse abijoonise eest 1p
Joonise kolmnurkadega *CKA* ja *KDB* täiendamise eest 1p
Kolmnurkade *CKA* ja *KDB* täisnurksuse näitamise eest 1p
Kolmnurkade *CKA* ja *KDB* sarnasuse näitamise eest 1p
Kolmnurkade *CKA* ja *KDB* võrdsuse näitamise eest 2p
Lahenduse tehnilise lõpuleviimise eest 1p
7p

5. Tähelepaneku, et otstarbekas on uurida liikumist vastastippude (näiteks *A* ja *B*) vahel, eest 1p
Uurimisel joonise mõtteliselt pooleks jagamise eest 1p
Teekonna tipust *A* tippu *B* märkimise (kirjeldamise) eest 1p
Teekonna tipust *C* tippu *A* märkimise (kirjeldamise) eest 1p
Teekonna tipust *B* tippu *C* märkimise (kirjeldamise) eest 1p
Teekonna tipust *A* tippu *F* võimatuse kirjeldamise eest 2p
Märkus. Tipp, millest õpilane alustab oma arutelu, võib loomulikul erineda. Samuti ei pruugi õpilane vaadelda vaid poolt joonist. Vastuoluni jõudmise eest igatahes 7p. **7p**